I

〔1〕 $(7+5\sqrt{7})a+(2+3\sqrt{7})b=3-\sqrt{7}$ より

$(7a+2b)+(5a+3b)\sqrt{7}=3-\sqrt{7}$

有理数部分と無理数部分を比較して

$$\begin{cases}7a+2b=3\\5a+3b=-1\end{cases}$$

連立方程式を解くと、$\underline{a=1,\ b=-2}$

〔2〕 $x^2+xy-2y^2+4x-y+3=x^2+(y+4)x-(2y^2+y-3)$

$=x^2+(y+4)x-(y-1)(2y+3)$

$=\{x+(2y+3)\}\{x-(y-1)\}$

$=(x+2y+3)(x-y+1)$

〔3〕 頂点が$(3,-1)$となる二次関数の式は $y=a(x-3)^2-1$ …①となり、

ここに原点$(0,0)$を代入する。

$0=a(0-3)^2-1$

これを解いて、$a=\dfrac{1}{9}$

①に代入して展開すると

$y=\dfrac{1}{9}(x-3)^2-1=\dfrac{1}{9}x^2-\dfrac{2}{3}$

〔4〕 CITRUSの６文字の並べ方は

${}_6P_6=6!=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$　　A. 720通り

UとSが隣り合う並び方は、UとSを一つとして考えると、

5文字を並べる順列だから、

${}_5P_5=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

UとSの並び方は2通りあるので、

$120\times2=240$　　A. 240通り

〔5〕 円に内接する四角形の対角の和は180°なので $\angle CDO=180^\circ-115^\circ=65^\circ$

$\triangle OCD$は$OC=OD$の二等辺三角形なので底角が等しいことから、

$\angle x=180^\circ-65^\circ\times2=50^\circ$　　A. $x=50$

$\angle CDO=\angle DCO=65^\circ$より、$\angle BCD=65^\circ+53^\circ=118^\circ$

円に内接する四角形の対角の和は180°なので $y=180^\circ-118^\circ=62^\circ$　A. $y=82$

※本解答はたぬぬ塾（https://jhs−teachers.com)が独自に作成したものです。

Ⅱ　[1]食塩水の問題

(1)　容器Aの濃度をx%、容器Bの濃度をy%とする。
容器Aから150g、容器Bから50gとりだして混ぜると10%の食塩水になることから、
これらの食塩の量に注目して式を立てると、

$$150\times\frac{x}{100}+50\times\frac{y}{100}=(150+50)\times\frac{10}{100}\text{ より}$$

$$3x+y=40\quad\cdots①$$

同様に容器Aから90g 容器Bから270gをとりだして混ぜると14%になることから

$$90\times\frac{x}{100}+270\times\frac{y}{100}=(90+270)\times\frac{14}{100}\text{ より}$$

$$x+3y=56\quad\cdots②$$

①②の連立方程式を解いて、$x=8, y=16$
よって、容器Aの濃度 8%, 容器Bの濃度 16%

(2)　容器Aから300g、容器Bから200gとりだした時の合計の食塩の量は、

$$300\times\frac{8}{100}+200\times\frac{16}{100}=56(g)$$

出来上がる食塩水の量は500gなので、その濃度は、

$$\frac{56}{500}\times100=11.2$$

よって、このときの濃度は 11.2% となる。

(3)　容器Aからxg、容器Bからygとりだすとすると、合計240gになることから、

$$x+y=240\quad\cdots①$$

また、濃度が10%になることから、

$$\frac{8}{100}x+\frac{16}{100}y=\frac{10}{100}\times240\text{ より}$$

$$x+2y=300\quad\cdots②$$

①②の連立方程式を解いて、$x=180, y=60$
よって、容器Aから 180g, 容器Bから 60g

Ⅱ　[2] 平均点･中央値･分散の問題

(1)　Eの得点がx点とされているので平均点もx点とすることができることから

$$\frac{84+78+91+87+x}{5}=x$$

これを解いて、 $x=85$

(2)　A～Dの得点を低い順に並べると、

78 , 84 , 87 , 91

(1)より、Eの得点が85点のとき、平均点と中央値が一致するので不適。

Eの得点が85点未満の時を考えると、中央値は84点となる。このことから、

$$\frac{84+78+91+87+x}{5}<84$$

これを解いて、$x<80$

Eの得点が86点のとき、中央値は86点となり、その平均点を出すと、

$$\frac{84+78+91+87+86}{5}=85.2\ (点)$$

となり、中央値より平均点が低いので条件を満たす。

Eの得点が86点を超えるとき、中央値は87点となるから

$$\frac{84+78+91+87+x}{5}<87$$

これを解いて、$x<95$

よって、$0<x<80, 85<x<95$ となる。

(3)　分散の求め方では、データから平均値を引いたものの2乗をつかうので、

データと平均値との差が小さいほど分散も小さくなる。よって(1)より、

分散が最も小さくなるのはデータと平均値が一致する $x=85$ となる。

このときの分散s^2は、

$$s^2=\frac{1}{5}\{(84-85)^2+(78-85)^2+(91-85)^2+(87-85)^2+(85-85)^2\}=18$$

Ⅲ

(1)　水槽Aの内のりの底面積は$15cm^2$なので、毎分$30cc(30cm^3)$の水をそそぐと、
毎分$2cm$ずつ水面の高さが増える。また、はじめから$15cc(15cm^3)$入っているので、
はじめの水面の高さは$1cm$はである。
このことから一次関数の形となり、その傾きは2、切片は1となるので、
$\underline{y=2x+1}$　となる。

(2)　水槽Bの内のりの底面積は$56cm^2$であり、一辺$6cm$の立方体が入っているので、
底面から$6cm$までの底面積にあたる部分は$56-6\times6=20(cm^2)$である。
ここに毎分$60cc(60cm^3)$の水をそそぐと、毎分$3cm$ずつ水面の高さが増える。
水面の高さが$6cm$に達するのは2分後であることから、

$y=3x$ $(x\leqq 2)$

水面の高さが$6cm$を超える$(x>2)$とき、その底面積は$56cm^2$となるので、
毎分$60cc(60cm^3)$の水をそそぐと、水面は$\dfrac{60}{56}=\dfrac{15}{14}cm$ずつ高さが増える。
また、$x=2,\ y=6$を通るので、

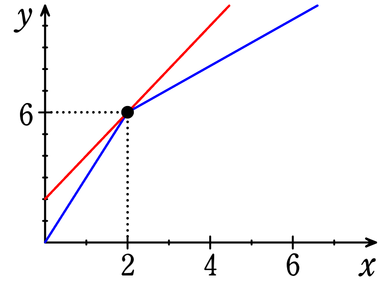
$y=\dfrac{15}{14}x+b$として、点(2,6)を代入し、bについて解くと、$b=\dfrac{27}{7}$

よって、$y=\dfrac{15}{14}x+\dfrac{27}{7}$ $(x>2)$

(3)　$0\leqq x\leqq 2$のとき $2x+1=3x$ から $x=1$ となり、これは条件を満たす。
$x>2$のとき、$2x+1=\dfrac{15}{14}x+\dfrac{27}{7}$ から $x=\dfrac{40}{13}$ となり、これは条件を満たす。

よって、$\underline{1分後と\dfrac{40}{13}分後}$

(4)　水槽Aの水面の高さ（赤線）が水槽Bの水面の高さ（青線）より常に高い状態を
グラフで考える。赤線が常に青線の上にあるような状態を考えればよいので、
赤線の式は(1)より傾きが2、グラフより点(2, 6)を通る
ことがわかる。
$y=2x+b$と置いて、点(2,6)を代入して解くと$b=2$。
つまり、最初の水面の高さを$2cm$とすれば
よいので、入れておく水の量は底面積$15cm^2$から
$15\times2=30(cc)$より多くしておく必要がある。　$\underline{A.\ 30cc}$



Ⅳ

(1) $\triangle ABE$ で考えると、$\angle ABE=45°$, $\angle AEB=90°$ より、$BE:AB=1:\sqrt{2}$ なので、

$1:\sqrt{2}=8:BE$ より $\underline{BE=4\sqrt{2}}$

また、$\triangle ABD$ で考えると、$AB=8, BD=6, AD=2\sqrt{10}$ であり、

余弦定理を使うと、

$$(2\sqrt{10})^2=8^2+6^2-2\cdot 8\cdot 6\cdot\cos\angle ABD$$

これを$\cos\angle ABD$について解くと、$\underline{\cos\angle ABD=\frac{5}{8}}$

$\triangle ABF$で考えると、$\cos\angle ABD=\dfrac{BF}{AB}$ より、

$$BF=AB\cos\angle ABD=8\cdot\frac{5}{8}=5$$

(2) $\triangle BEF$で考えると、(1)より、$BE=4\sqrt{2}, BF=5$。

また$\cos\angle DBC=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ なので、余弦定理を使うと、

$$EF^2=5^2+(4\sqrt{2})^2-2\cdot 5\cdot 4\sqrt{2}\cdot\cos\angle DBC$$
$$=25+32-2\cdot 5\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{10}=49$$

$EF>0$ より、$EF=7$

$AH\perp$平面BCD(底面)であり、直線BCは平面BCD上の直線であるから、

$AH\perp BC$ となり、これと$AB\perp BC$であることから直線BCは平面AEHに

垂直であることがわかる。よって、$BC\perp EH$である。

よって、$\underline{\angle BEH=\angle BFH=90°}$である。（三垂線の定理）

これにより、四角形BEHFは対辺の和が180°なので、その頂点は同一円周上に

存在する。また、$\underline{\angle BEH=\angle BFH=90°}$であることから、$BH$が直径となる。

すると、正弦定理より、$\dfrac{EF}{\sin\angle DBC}=2BH\cdots$①となるので、

$\sin^2\angle DBC+\cos^2\angle DBC=1$ から$\sin^2\angle DBC=1-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)^2$

$\sin\angle DBC>0$ より、$\sin\angle DBC=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

①に代入すると、$\dfrac{7}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}=2BH$ となりBHについて解くと、$\underline{BH=5\sqrt{2}}$

$\triangle ABH$ で考えると、$AH^2=8^2-(5\sqrt{2})^2=14$　$AH>0$ なので、$\underline{AH=\sqrt{14}}$