Ⅰ

〔1〕 $A-B=2x^2+xy-y^2$ に $B=3x^2-4xy+2y^2$ を代入してA について解く。

$A-(3x^2-4xy+2y^2)=2x^2+xy-y^2$ より

$A=2x^2+xy-y^2+(3x^2-4xy+2y^2)$
$\quad=5x^2-3xy+y^2$

〔2〕 $(6+3\sqrt{5})a+(18-6\sqrt{5})b-13+\sqrt{5}=0$ より

$(6a+18b)+(3a-6b)\sqrt{5}=13-\sqrt{5}$

有理数部分と無理数部分を比較して

$\begin{cases}6a+18b=13\\3a-6b=-1\end{cases}$ これを解いて $\underline{a=\dfrac{2}{3},\, b=\dfrac{1}{2}}$

〔3〕 $3+\dfrac{n-4}{5}>\dfrac{n}{3}$ の両辺に15をかけると、

$45+3(n-4)>5n$ 　これを解いて $n<\dfrac{33}{2}=16\dfrac{1}{2}$

よって、これを満たす最大の整数n は $\underline{n=16}$ となる。

〔4〕 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$ （公式）に代入すると、

$6^2=14+2(xy+yz+zx)$ から、$\underline{xy+yz+zx=11}$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$（公式）に代入すると、

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\}$より

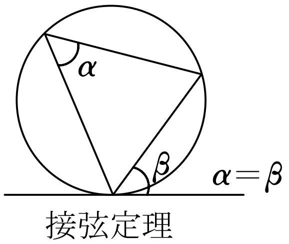
$36-3xyz=6\times(14-11)$から、$\underline{xyz=6}$

〔5〕 接弦定理より、$\angle ACB=\angle ABP=107°$

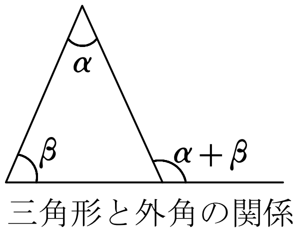
$\triangle ABD$で考えると、$\angle ABP$は外角となるため、

$\angle BAD=\angle ABP-\angle ADB=107°-72°=35°$

よって、$\angle BAC=35°$



接弦定理

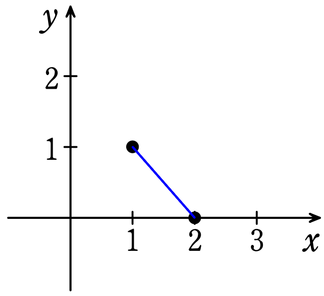


三角形と外角の関係

$\boxed{\text{II}}$〔1〕

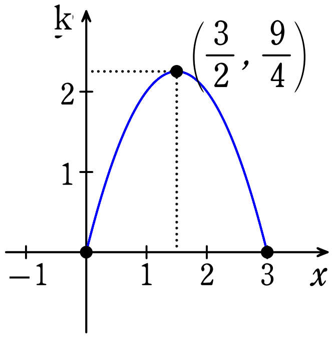
(1)　傾きaが負の値であることから、
$x=1$のとき$y=1$、$x=2$のとき $y=0$となる。
この2点を通る直線の方程式は、

$$y-0=\frac{0-1}{2-1}(x-2))\text{より}\quad \underline{y=-x+2}$$



(2)　$xy=k$ …①とおく。$x+y=3$より$y=3-x$…②
②を①に代入して整理すると、

$$x(3-x)=k$$
$$k=-x^2+3x$$
$$=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$



$x\geqq0, y\geqq0$の範囲でグラフを描くと右の
とおりとなり、グラフより$\underline{\text{最大値は}\ \frac{9}{4}\text{、最小値は}\ 0}$となる。

$\boxed{\text{II}}$〔2〕

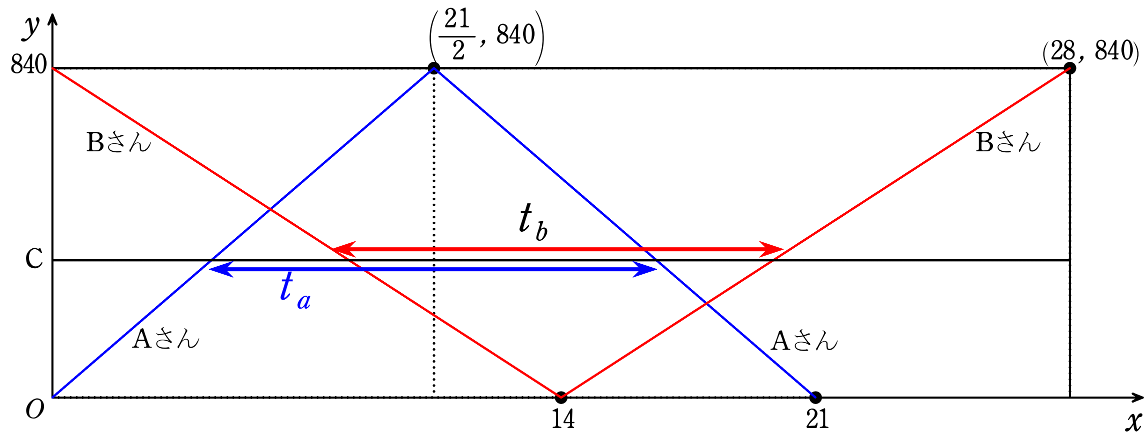
(1)　Aさん、Bさんはともに大学～駅間を往復するので1680m移動することとなる。
Aさんは毎分60mで移動するので、$1680\div60=28$(分)
Bさんは毎分80mで移動するので、$1680\div80=21$（分）
よって、Aさんが大学につくのは、Bさんが駅に着いてから<u>7分後</u>となる。

(2)　x軸を時間(分)、y軸を距離(m)とする。また、駅を$0m$、大学を$840m$とする。
Aさんは大学出発$(0, 840)$、駅到着$(14, 0)$、大学到着$(28, 840)$を通り、
Bさんは駅出発$(0,0)$、大学到着$\left(\dfrac{11}{2}, 840\right)$、駅到着$(21, 0)$を通るので、
この時、AさんBさんの直線の方程式は以下の通り

$$\text{Aさん：}\begin{cases} y=-60x+840\ (0\leqq x\leqq 14) \cdots ① \\ y=60x-840\ (14\leqq x\leqq 28) \cdots ② \end{cases}$$

$$\text{Bさん：}\begin{cases} y=80x\ \left(0\leqq x\leqq \dfrac{11}{2}\right) \cdots ③ \\ y=-80x+1680\ \left(\dfrac{11}{2}\leqq x\leqq 21\right) \cdots ④ \end{cases}$$

また、Cさんは駅から$Cm(y=c)$地点にいるとすると、これらのグラフは、



AさんとCさんが一回目に出会う時間は、①に$y=c$を代入してxについて解けばよい

$$c=-60x+840 \text{ より } x=\frac{840-c}{60} \text{ となる。同様に２回目は} x=\frac{840+c}{60}$$

これより、AさんとCさんが出会った１回目から２回目までの時間t_aは

$$t_a=\frac{840+c}{60}-\frac{840-c}{60}=\frac{2c}{60}=\frac{c}{30} \text{ となる。}$$

同様にBさんとCさんが出会った１回目から２回目までの時間t_bは

$$t_b=\frac{1680-c}{80}-\frac{c}{80}=\frac{1680-2c}{80}=\frac{840-c}{40} \text{ となる。}$$

これらを条件である、$t_a=2t_b$ に代入すると

$$\frac{c}{30}=\frac{2(840-c)}{40} \text{ より、} c=504 \text{ となる。}$$

A. 駅から $504m$

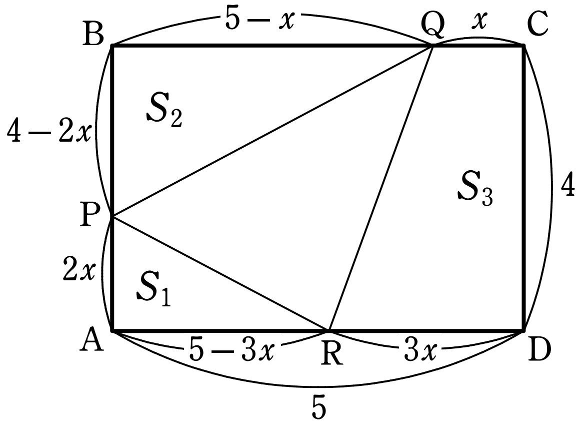
Ⅲ

〔1〕 $S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 2x(5-3x)=-3x^2+5x$

$S_2=\dfrac{1}{2}(4-2x)(5-x)$

$\quad=x^2-7x+10$

$S_3=\dfrac{1}{2}\cdot 4(x+3x)=8x$



〔2〕 $S_{\triangle PQR}=5\cdot 4-S_1-S_2-S_3$

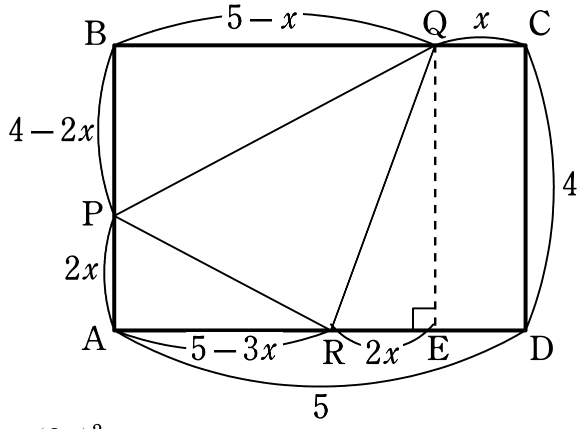
$$\begin{aligned}&=20-(-3x^2+5x)-(x^2-7x+10)-8x\\&=2x^2-6x+10\\&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{2}\end{aligned}$$

よって、$\triangle PQR$ の面積の最小値は$\underline{\dfrac{11}{2}}$であり、そのときの$x$の値は$\underline{\dfrac{3}{2}}$である

〔3〕 三平方の定理の逆を使うと、

$\angle PRQ=90°$ならば$PQ^2=QR^2+RP^2$

点Qから垂線を引きADとの交点をEとする。



$PQ^2=(4-2x)^2+(5-x)^2$

$QR^2=(2x)^2+4^2$

$RP^2=(5-3x)^2+(2x)^2$

①に代入すると、

$$\begin{aligned}(4-2x)^2+(5-x)^2&=(2x)^2+4^2+(5-3x)^2+(2x)^2\\5x^2-26x+41&=17x^2-30x+41\\12x^2-4x&=0\\4x(3x-1)&=0\end{aligned}$$

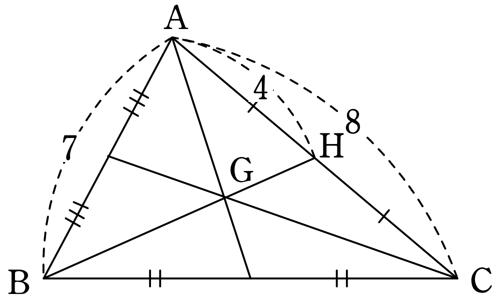
$0<x<\dfrac{5}{3}$ より $\underline{x=\dfrac{1}{3}}$

$\boxed{\text{IV}}$

1]　△ABHにおいて、余弦定理を考える。

$$BH^2=7^2+4^2-2\cdot7\cdot4\cdot\cos\angle BAC$$
$$=49+16-2\cdot7\cdot4\cdot\frac{2}{7}$$
$$=49$$

よって、$BH>0$ より $\underline{BH=7}$

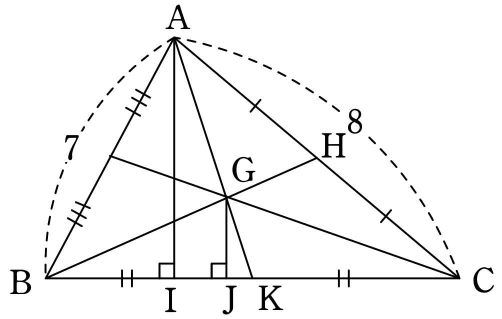


点Gは三角形の重心なので、$BG:GH=2:1$より、$BG:BH=2:3$ となるので、

$$BG=\frac{2}{3}BH=\frac{2}{3}\times7=\frac{14}{3}$$

$\underline{\text{A.}\quad BG=\frac{14}{3}}$

(2)　外接円の半径をRとすると正弦定理より、



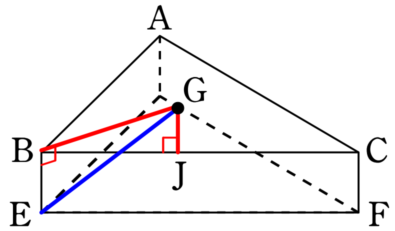
$$\frac{7}{\sin\angle ACB}=2R$$

$$\sin\angle ACB=\frac{7}{2R}=\frac{7}{2\cdot\frac{21\sqrt{5}}{10}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin\angle ACB=\frac{AI}{AC}\text{ より }AI=AC\cdot\sin\angle ACB=8\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{8\sqrt{5}}{3}$$

(3)　直線AGとBCの交点をKとすると、$\triangle AIK\backsim\triangle GJK$となり、$G$は重心なので
$AG:GK=2:1$となるので、相似比は$\triangle AIK:\triangle GJK=3:1$となることがわかる。

よって、$AI:GJ=3:1$ より、$\underline{GJ=\frac{1}{3}AI}$



$$\frac{\cos\angle EGJ}{\cos\angle EGB}=\frac{\frac{GJ}{EG}}{\frac{BG}{EG}}=\frac{GJ}{BG}$$

ここで、$GJ=\frac{1}{3}AI=\frac{1}{3}\cdot\frac{8\sqrt{5}}{3}=\frac{8\sqrt{5}}{9}$なので、

$$\text{与式}=\frac{\frac{8\sqrt{5}}{9}}{\frac{14}{3}}=\frac{4\sqrt{5}}{21}\text{ となる。}$$